Tentamen i Matematisk fysik FTF131

Måndagen den 9 januari 2017

Examinator: Henrik Johannesson, tel. 0768-237042.
Inga hjälpmedel är tillåtna på denna tentamen.
Resultat meddelas individuellt via e-post.

Tentamen består av fem uppgifter där varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade efter svårighetsgrad.

Strukturera Dina lösningar noggrant. **Uppställda samband skall motiveras**, gärna med en översiktlig skiss av tankegång och bärande element! Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

---

1. (a) Residykalkyl är ett effektivt redskap vid beräkningen av Greenfunktioner. Vad är en Greenfunktion? Varför är Greenfunktioner så viktiga i fysiken? Och hur kommer egentligen residykalkylen in i beräkningen av Greenfunktioner? Svara kortfattat med så få formler som möjligt. Använd ord och skisser!

(b) Använd residykalkyl till att visa att stegfunktionen $\theta(x)$ har integralrepresentationen

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{t - i\epsilon} dt\,, \quad \epsilon > 0.$$

2. (a) Ett centralt teorem i teorin för integralekvationer är det så kallade *Fredholmalternativet*. Det kom att spela en viktig roll då David Hilbert, i arbetet med att konstruera ett fullständigt bevis för teoremet, leddes till att utveckla teorin för Hilbertrum − den matematiska grundvalen för kvantmekaniken. Ge en formulering av Fredholmalternativet!

(b) Betrakta integralekvationen

$$u(x) - \lambda \int_0^1 (1 + xt)u(t)dt = x$$

Antag att $\lambda = 1$. Vilket av de två Fredholmalternativen gäller då?

3. Schrödingers ursprungliga härledning av den tidsoberoende Schrödingerekvationen bygger på variationskalkyl. Hur? Skissa de väsentliga stegen i härledningen! En viktig komponent är att Lagrangemultiplikatorn kan tolkas som en energi. Vad är en *Lagrangemultiplikator*? Och hur kommer den in i Schrödingers härledning?

4. Rummet $\mathcal{L}^2_w(\mathbb{R})$ av funktioner definierade på $\mathbb{R}$ med ändlig inre produkt

$$\langle f|g\rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} f^*(x)g(x)w(x)dx$$

med viktfunktion $w(x) = e^{-x^2}$ är ett Hilbertrum. Den ortogonala basen i detta Hilbertrum ges av *Hermitepolynomen*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Verifiera detta påstående för de tre första Hermitepolynomen.

5. (a) Betrakta permutationsgruppen S_3 med en tre-dimensionell representation D där tre av elementen i S_3 representeras av

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vilka är de övriga representationsmatriserna i D?

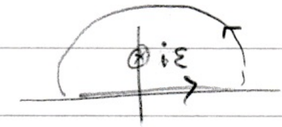
(b) Bestäm karaktärerna för representationsmatriserna i D. Hur kan du använda ditt resultat till att fastställa hur många irreducibla representationer som finns i D? Varför är denna typ av frågeställning (tillämpad på mer komplexa grupper!) intressant för en fysiker? Diskutera!

Tentamen i Matematisk fysik FTF131, 9 januari 2017

Lösningsskisser

1a) Se föreläsningsanteckningar.

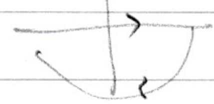
b) $x > 0$: lägg Jordankurvan i övre halvplanet



residy teoremet

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon}\,dz = \cancel{\frac{1}{2\pi i}}\cdot\cancel{2\pi i}\;\underbrace{\lim_{z\to i\varepsilon}\cancel{(z-i\varepsilon)}\frac{e^{ixz}}{\cancel{(z-i\varepsilon)}}}_{\mathrm{Res}[f(z)]} = 1 \qquad (1)$$

$x < 0$: lägg Jordankurvan i undre halvplanet



$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon} = 0 \qquad (2)$$

ty inga poler i undre halvplanet

$$(1)\ \&\ (2) \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixz}}{z-i\varepsilon}\,dz = \Theta(x) \qquad \text{VSB}$$

2a) "FREDHOLMALTERNATIVET":

Låt K vara en Hilbert-Schmidt operator, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Snäll funktion kan skrivas som en oändlig serie av separabla kärnor.

Tillämpat på integralekvationen i tentatesen:

Antingen har den inhomogena ekvationen

$$u(x) - \lambda \int_0^1 (1+xt)u(t)\,dt = x$$

en unik lösning eller så har den homogena ekvationen

$$u(x) = \lambda \int_0^1 (1+xt)u(t)\,dt$$

åtminstone en icke-trivial lösning.

b) Separabel kärna!

$$u(x) = x + \lambda \underbrace{\int_0^1 u(t)\,dt}_{A} + \lambda x \underbrace{\int_0^1 t u(t)\,dt}_{B}$$

Integrera båda sidor $\int_0^1 dx$:

$$\Rightarrow \quad A = \tfrac{1}{2} + \lambda A + \lambda B/2 \quad (1)$$

Dito med $\int_0^1 x\,dx$:

$$\Rightarrow \quad B = \tfrac{1}{3} + \lambda A/2 + \lambda B/3 \quad (2)$$

$$(1) \,\&\, (2) \Rightarrow \begin{cases} A(1-\lambda) = \tfrac{1}{2}(B\lambda + 1) \\ B(1-\lambda/3) = \tfrac{1}{3} + \lambda A/2 \end{cases}$$

$$\Downarrow \; \lambda = 1$$

$$u(x) = -2$$

$\Rightarrow$ Unik lösning till den inhomogena ekvationen.

3) Se exempel i Arfken-Weber-Harris.

4) Denna typ av problem ingår ej i årets kurs.

5 a) Vi ser att D_1 representerar $(1)(2)(3)$, $D_2 \sim (1)(23)$, $D_3 \sim (12)(3)$. Så vi behöver matriserna för $(13)(2)$, (123), (132) också:

$$(13)(2) = D_4 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(123) = D_5 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(132) = D_6 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\chi(D_1) = 3$, $\chi(D_2) = \chi(D_3) = \chi(D_4) = 1$

$\chi(D_5) = \chi(D_6) = 0$

$\Rightarrow$ 3 konjugatklasser $\Rightarrow$ 3 inekvivalenta irreps

DISKUSSION: SE FÖRELÄSNINGSANTECKNINGARNA!